Sesión preparatoria CO+
Problemas de Olimpiada de combinatoria, juegos y estrategia

Juan González-Meneses

5 de marzo de 2021

Nota: Los problemas que tengan marcado un año, son problemas de la fase local de la Olimpiada Matemática Española de ese año.

1. **(2006)** Decimos que tres números naturales distintos forman una terna aditiva si la suma de los dos primeros de ellos es igual al tercero. Hallar, razonadamente, el máximo número de ternas aditivas que puede haber en un conjunto dado de 20 números naturales.

2. **(2005)** Cuatro bolas negras y cinco bolas blancas se colocan, en orden arbitrario, alrededor de una circunferencia. Si dos bolas consecutivas son del mismo color, se inserta una nueva bola negra entre ellas. En caso contrario, se inserta una nueva bola blanca. Se retiran las bolas negras y blancas previas a la inserción. Repitiendo el proceso, ¿es posible obtener nueve bolas blancas?

3. **(2005)** En un tablero de ajedrez 10×10 se colocan 41 torres. Probar que se pueden elegir al menos 5 de ellas que no se coman entre sí.

4. **(2004)** En un tablero de damas (8×8), colocamos las 24 fichas del juego de modo que llenen las 3 filas de arriba. Podemos cambiar la posición de las fichas según el siguiente criterio: una ficha puede saltar por encima de otra a un hueco libre, ya sea horizontal (a izquierda o derecha), vertical (hacia arriba o hacia abajo) o diagonalmente. ¿Podemos lograr colocar todas las fichas en las 3 filas de abajo?

5. **(2003)** Se dispone de pequeñas piezas de madera de tamaño 4 x 5 x 10. Decide si es posible o no apilarlas, sin dejar huecos y apoyándolas siempre sobre cualquiera de sus caras, para formar un ortoedro de dimensiones $2^{2003} \times 3^{2003} \times 5^{2003}$.

6. **(2003)** Por turno, en orden alfabético, tres amigos lanzan un dado. Quien saque un 6 en primer lugar gana lo apostado. Por cada euro que apueste Carlos, ¿qué cantidad han de poner Ana y Blas para equilibrar el juego y lograr que sea equitativo, es decir, para que las expectativas de ganancia sean las mismas para los tres colegas y no se vean afectadas por el orden de actuación al lanzar el dado?

7. **(2002)** En un equipo de fútbol tenemos 11 jugadores, cuyas camisetas están numeradas del 1 al 11. Elegimos al azar 6 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de sus camisetas sea impar?

8. **(2002)** La suma de las edades de los 120 estudiantes que participaron el año pasado en la fase final de la Olimpiada Matemática fue de 2002 años. Demuestra que podrías haber elegido 3 de ellos tales que la suma de sus edades no fuera menor de 51 años.

9. **(2002)** Considera 7 puntos arbitrarios del plano y los 21 segmentos que los conectan entre sí. Demuestra que al menos 3 de estos 21 segmentos son de distinta longitud.

10. En una isla del Pacífico se observa que nada más que sobreviven unos camaleones, que pueden cambiar de color. En total había 20 verdes, 19 grises y 18 marrones. Se observó que cuando se encuentran dos camaleones de colores distintos, los dos cambian automáticamente al tercer color y que no cambian de color en ningún otro caso. ¿Es posible que todos los camaleones se vuelvan del mismo color?